Elementarna hidrodinamička teorija prostiranja talasa u plazmi

- idealna (bezkoliziona), homogena i beskonačna plazma

14

Važnost proučavanja talasa u plazmi

- Proučavanje nastajanja oscilacija i talasa u plazmi spada u pitanja od najvećeg interesa.
- Bez obzira o kojoj se plazmi radi, bilo da je u pitanju lab. plazma ili plazma u astrofizičkim uslovima, gotovo uvek je u plazmi pobuđen neki tip oscilacija ili se kroz plazmu prostire neki tip talasa.
- Sadržaj ovog predavanja o talasima u plazmi ima prvenstveno ilustrativan karakter, sa ciljem da se uvede nekoliko osnovnih pojmova i odnosa kod plazmenih talasa.
- Razmatra se najjednostavniji slučaj idealne (bezkolizione) homogene i beskonačne plazme.

Uvodne napomene

- Svako periodično kretanje se pomoću Furij-ovog razvoja može prestaviti u obliku superpozicije harmonijskih oscilacija sa različitih frekvencija ω i talasnim dužina λ. Talas predstavlja jednu od tih komponenti.
- Talas obično ima sinusoidnu formu, kada je amplituda oscilacija mala (ovi talasi su predmet naših daljih razmatranja).

Obnovimo plazmene oscilacije

- Nastaju na mestu lokalnog narušavanja elektroneutralnosti plazme.
- Tipične elektrostatičke oscilacije (oscilacije gustine prostornog naelektrisanja i električnog polja određenog ovom gustinom), koje se preciznije nazivaju *elektronske plazmene oscilacije*.
- Frekvencija elektosnkih plazmenih oscilacija

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$$

Predstavljanje talasa

- Svaku veličinu, koja se menja po sinusnom zakonu, na primer gustinu *n*, možemo zapisati u obliku

$$n = \bar{n}\exp\left[i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right)\right]$$

pri čemu u Dekart-ovim koordinatama važi

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Ovde je $\bar{n}$ konstanta - amplitudu talasa, **k**- je talasni vektor.

- Ako se talas prostire duž x-ose, vektor **k** ima samo x-komponentu, i jednačina talasa postaje

$$n = \bar{n}\exp\left[i\left(k\,x - \omega t\right)\right]$$

- Zapisujući *n* u eksponencijalnom obliku, podrazumeva se da <u>fizički simisao ima samo relani deo</u> gornjeg izraza.

Kako se dobijaju jednačine koje opisuju talasne procese u plazmi ?

- Polazi se od osnovnih jednačina dinamike date sredine;
- Primena metoda perturbacija;
- Linearizacija jednačina za perturbacije;
- Pretpostavlja se da plazma u stacionarnom stanju miruje;
- Jednačine za perturbacije će biti diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima;
- Rešenja jednačina za perturbacije tražimo u obliku;

$$A e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

- Rešenja fizički predstavljaju ravanske talase frekvencom ω i talasnim vektorm $\mathbf{k}$.

Opšti odnosi kod ravnih talasa

- Ako je sredina (plazma) beskonačna, sve jednačine za perturbacije su homogene, te stoga nemaju uvek rešenje. Uslov kompatibilnosti ovih jednačina dovodi do izvesne veze između ω u **k**; *disperziona jednačina*

$$F(\omega,\mathbf{k}) \equiv F(\omega,k_x,k_y,k_z)$$

- Disperziona jednačina može imati više rešenja po ω. Ta rešenja u opštem slučaju mogu biti kompleksna

$$\omega_n = \omega_n(\mathbf{k}) \equiv \omega_n(k_x,k_y,k_z)$$

- Svako od rešenja odgovara posebnom tipu talasa, tzv. talasni **mod**.
- Disperziona jednačina datog talasnog moda sadrži celokupnu informaciju o karakteristikama talasa.

1) Talasni vektor realan

- Pretpostavimo da je talasni vektor realan (što odgovara prostiranju talasa date talasne dužine kroz materijalnu sredinu).
- Ovaj oblik rešenja odgovara talasnom procesu modalne frekvence Reω, čija amlituda raste sa vremenom (odnosno opada).

$$\omega_n = \mathrm{Re}\,\omega_n + i\,\mathrm{Im}\,\omega_n$$

$$Ae^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left[Ae^{(\mathrm{Im}\,\omega_n)t}\right]\cdot e^{-i(\mathrm{Re}\,\omega_n)t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\omega = \mathrm{Re}\,\omega_n(\mathbf{k}) \qquad \gamma = \mathrm{Im}\,\omega_n(\mathbf{k})$$

2) Frekvencija je realna

- Pretpostavimo da je frekvencija realna (što odgovara prostiranju talasa date frekvencije kroz materijalnu sredinu) – i da su komponente talasnog vektora kompleksne.

$$k(\omega) = \mathrm{Re}\,k + i\,\mathrm{Im}\,k \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\mathrm{Re}\,k} \qquad \delta = \frac{1}{|\mathrm{Im}\,k|}$$

- Fazna i grupna brzina:

$$v_f = \frac{\omega}{k},\ \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$$

- Indeks prelamanja:

$$N = \frac{c}{v_f} = \frac{ck}{\omega}$$

MHD teorija prostiranja talasa u plazmi

Nestišljiv i stišljiv elektroprovodni fluid

MHD teorija -podsetnik

- Magnetna hidrodinamika: plazma se positovećuje sa jednim provodnim fluidom; dinamičko stanje u plazmi se opisuje uvođenjem polja ρ,p,T, **v**, **j,** **E** i **B**. Ove veličine su u MHD povezane jednačinama

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\mathbf{v}\right) = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \rho_{el}\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \mu\Delta\mathbf{v} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right),$$

$$p = F\left(\rho\right),$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) + \rho_{el}\mathbf{E},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{el},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}.$$

MHD aproksimacija

- U slučaju srazmerno visoke elektroprovodnosti prethodni sistem se može uprostiti stavljajuci da je ρ_{el}=0. Situacija se svodi na interakciju provodnog fluida sa magnetnim poljem. Osnovne veličine su ρ, p, **v** i **B**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{v}\right) = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right),$$

$$p = F\left(\rho\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Nestišljivi elektroprovidni fluid
Alfven-ov i modifikovani Alfven-ov talas

- Polazeći od jednačina MHD, uz pretpostavku da elektroprovodni fluid idealan (bezkolizioni), homogen i beskonačan, van polja zapreminskih sila, izvesti *disperzionu jednačinu* za **Alfen**-ov i *modifikovani* **Alfen**-ov talas. Prilikom ispisvanja talasnih jednačina u skalarnom obliku koristiti se tzv. **k**-sistemom.

$$\omega = \omega(\mathbf{k})$$

Polazne jednačine

- Polazne jednačine

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\operatorname{rot}\mathbf{B})\times\mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

algoritam

- Najpre u polazne jednačine uvrstiti veličine koje odgovaraju osnovnom stacionarnom stanju: ρ_0, p_0, $\mathbf{v_0}$ i $\mathbf{B_0}$. (v_0=0) – stacionarno stanje se može realizovati bez ograničenja.
- Zatim, u polazne jednačine uvrstiti veličine: $\rho_0+\rho'$, p_0+p', $\mathbf{v_0}+\mathbf{v}'$ i $\mathbf{B_0}+\mathbf{B}'$ (v_0=0)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,\mathbf{v}' = 0,\\
&\rho_0\left[\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \left(\mathbf{v}'\cdot\nabla\right)\mathbf{v}'\right] = -\nabla p' + \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\mathbf{B}')\times\left(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}'\right),\\
&\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\mathbf{v}'\times\left(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}'\right)\right],\\
&\mathrm{div}\mathbf{B}' = 0.
\end{aligned}
$$

- Ispisivanje ovog sistema jednačina u skalarnom obliku: uvođenje k-sistema

$$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B}_0 = B_0\left(\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_z\right)$$

- Ovim izborom koordinatnog sistema, perturbacije **v**’, p’ i **B**’ NISU funkcije svih triju koordinata već zavise samo od z.

Šta zaključujemo?

Iz prve i četvrte jednačine polaznog sistema sledi

$$div\mathbf{v}' = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0$$

$$div\mathbf{B}' = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z'}{\partial z} = 0$$

1. Ove dve perturbacije v_z', B_z' ne zavise od koordinata, tj. u svakom trenutku vremena imaju jednaku vrednost u svim tačkama elektroprovodnog fluida. Međutim, na beskonačno udaljenim granicama, te perturbacije su jednake nuli

$$v_z' = 0, \quad B_z' = 0$$

2. Ni hidrodinamičke ni elektrodinamičke perturbacije nemaju komponentu u pravcu vektora **k**. Drugim rečima, *u beskonačnom nestišljivom elektroprovodnom fluidu su talasi čisto transverzalni, i to kako u hidrodinamičkom tako i u elektrodinamičkom pogledu*.

Iz druge i treće jednačine dobijaju se sledeće skalarne projekcije:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0 \frac{\partial v_x'}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\theta \frac{\partial B_x'}{\partial z} \\
&\rho_0 \frac{\partial v_y'}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\theta \frac{\partial B_y'}{\partial z} \\
&0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0}\left(B_x' \frac{\partial B_x'}{\partial z} + B_y' \frac{\partial B_y'}{\partial z} + B_0 \sin\theta \frac{\partial B_x'}{\partial z} \right)
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial B_x'}{\partial t} = B_0 \cos\theta \frac{\partial v_x'}{\partial z} \\
&\frac{\partial B_y'}{\partial t} = B_0 \cos\theta \frac{\partial v_y'}{\partial z} \\
&0 = 0
\end{aligned}\right\}$$

Linearizacija jednačina za perturbacije

- kod nestišljivog elektroprovodnog fluida neće biti potrebno, jer su sve jednačine već linearne po perturbacijama osmim treće, koja nije u vezi sa primarnim karakteristikama talasa **v**' i **B**' već određuje perturbaciju pritiska.

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0}\left(B'_x \frac{\partial B'_x}{\partial z} + B'_y \frac{\partial B'_y}{\partial z} + B_0 \sin\theta \frac{\partial B'_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p' + \frac{1}{2\mu_0}\left(B'^2_x + B'^2_y\right) + \frac{1}{\mu_0} B_0 B'_x \sin\theta \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p_0 + p' + \frac{1}{2\mu_0}\left(\mathbf{B}'^2 + 2\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{B}_0^2\right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) = 0$$

- Suma hidrodinamičkog i magnetnog pritiska u razmatranom elektroprovodnom fluidu i u pertutbovanom stanju ne zavisi od koordinate z, tj. u svakom trenutku vremena ima jednaku vrednost u svim tačkama fluida.
- Nestišljiv fluid je primer sistema u kome je *mogući naći rešenja talasnih jednačina pri proizvoljno velikim amplitudama.*

Jednačine za komponente **v**' i **B**'

$$\left.\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial v_x'}{\partial t}&=\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\theta\frac{\partial B_x'}{\partial z}\\ \rho_0\frac{\partial v_y'}{\partial t}&=\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\theta\frac{\partial B_y'}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial B_x'}{\partial t}&=B_0\cos\theta\frac{\partial v_x'}{\partial z}\\ \frac{\partial B_y'}{\partial t}&=B_0\cos\theta\frac{\partial v_y'}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

Kroz beskonačan, idealan i homogeni elektroprovodni fluid mogu se prostirati dva nezavisna talasna moda:

Alfven-of magnetohidrodinamički talas okarakerisan sa veličinama $v_y^{'}, B_y^{'}$

Modifikovani Alfven-ov talas okarakterisan sa $v_x^{'}, B_x^{'}$

Disperziona jednačina

- Iz jednačina za Alfvenov i modifikovani Alfvenov talas dobijaju se dve istovetne relacije

$$\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\theta \frac{\partial B'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B'}{\partial t} = B_0 \cos\theta \frac{\partial v'}{\partial z}$$

- Ako potražimo rešenja ovih jednačina u obliku ravnih talasa, nakon skraćivanja eksponencijalnih faktora dobijaju se jednačine za perturbacije:

$$-i\omega\rho_0 \hat{v} = i\frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\theta k\hat{B}$$

$$-i\omega\rho\hat{B} = iB_0 \cos\theta k\hat{v}$$

- Uslov kompatibilnosti sistema daje jednačinu

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2\theta$$

Analiza disperzione jednačine

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2\theta$$

- Veličina v_A je Alfven-ova brzina.
- Alfven-ov i modifikovani Alfven-ov talas imaju istu disperzionu jednačinu

$$\omega = \pm k v_A \cos\theta = \pm v_A \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0}{B_0}$$

  gde dva znaka odgovaraju dvama smerovima prostiranja u odnosu na magnetno polje.
- Fazna i grupna brzina su:

$$v_f = \pm v_A \cos\theta \qquad \mathbf{v}_g = \pm v_A \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}$$

- Zadnje dve jednakosti pokazuju da se <u>ni Alfven-ov ni modifikovani Alfven-ov talas ne može prostirati normalno na magnetno polje</u>, i da je za oba talasa <u>grupna brzina</u> numerički jednaka v_A i kolinearna sa magnetnim poljem<u>, nezavisno od ugla </u>θ.

Još jedan važan zaključak

- Iz jednačina za amplitude perturbacija i disperzione jednačine dobija se:

$$\hat{v} = \mp \frac{v_A}{B_0}\hat{B} = \frac{\hat{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad \text{odnosno} \quad v' = \mp \frac{v_A}{B_0} B' = \frac{B'}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$$

- Odavde proizilazi da je

$$\frac{1}{2}\rho_0 v'^2 = \frac{1}{2\mu_0} B'^2$$

- Gustina kinetičke energije fluida i gustina energije magnetnog polja talasa su međusobno jednake kako po amplitudi tako i po fazi.
- Iz gornjih jednačina sledi: $\left|\frac{v'}{v_A}\right| = \left|\frac{B'}{B_0}\right|$
- Dakle, ako je u talasu $|v'| >> v_A$ biće i $|B'| >> B_0$
- Alfven-ovi talasi mogu znatno pojačati prvobitno magnetno polje i preneti ga na velika rastojanja.